www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

NOTATIONS ET RAPPEL.

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, on désigne par Ker u le noyau de u et par Im u l'image de u.

On rappelle que, si E est de dimension finie, on a :

$$\dim (\text{Ker } u) + \dim (\text{Im } u) = \dim E .$$

Pour tout entier k strictement positif, on note u^k l'endomorphisme $u \circ u \circ \ldots \circ u$ (k fois).

Enfin, si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, on appelle « endomorphisme induit par u sur F » l'endomorphisme de F qui à tout élément x de F associe $u(x)$.

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel de dimension finie n ($n \geqslant 1$) sur le corps K (K $= \mathbb{R}$ ou K $= \mathbb{C}$) et I désigne l'application identique de E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

I

La partie I est consacrée à établir des résultats qui seront utilisés dans les parties suivantes. On pourra admettre ceux que l'on n'aura pas su démontrer.

1° On rappelle que la trace d'une matrice carrée est la somme des éléments de sa diagonale principale.

a. Soit $\mathcal{M}_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n sur K. Vérifier que l'application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_n(K)$, associe sa trace est une forme linéaire.

b. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(K)$. Montrer que les matrices AB et BA ont la même trace et en déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

c. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ et soit α un élément non nul de K. Montrer qu'il n'existe pas d'élément inversible g de $\mathcal{L}(E)$ tel que :

$$f + \alpha I = g^{-1} \circ f \circ g .$$

2° Soit u un élément de $\mathcal{L}(E)$ et soit k un entier strictement positif.

a. Montrer que

$$\text{Ker } u^k \subset \text{Ker } u^{k+1}$$

et que $(\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}) \Rightarrow (\text{Ker } u^{k+1} = \text{Ker } u^{k+2})$.

b. Énoncer et démontrer des propriétés analogues concernant les sous-espaces vectoriels Im u^k.

c. Montrer que, si Ker $u = \{0\}$, alors Ker $u^k = \{0\}$.

En déduire que, pour tout élément u de $\mathcal{L}(E)$, on a :

$$\text{Ker } u^n = \text{Ker } u^{n+1} .$$

Énoncer et démontrer des propriétés analogues concernant les images.

d. Montrer que l'on a :

$$E = \text{Ker } u^n \oplus \text{Im } u^n .$$

Tournez la page S. V. P.

II

Dans toute la suite du problème, on étudie les couples (u, v) d'éléments de $\mathfrak{L}(E)$ qui vérifient la propriété (P) suivante :

(P) $$u \circ v - v \circ u = u.$$

Soit (u, v) un couple d'éléments de $\mathfrak{L}(E)$ vérifiant la propriété (P).

1° Montrer que u n'est pas bijectif.

Montrer que la matrice de u relativement à une base quelconque de E a une trace nulle.

2° Déterminer tous les couples qui vérifient la propriété (P) dans le cas où $n = 1$.

3° On suppose que $n = 2$.

Déterminer l'endomorphisme u^2 en calculant sa matrice relativement à une base de E.

On suppose que u n'est pas l'endomorphisme nul. Quelle est alors la dimension de Ker u ? Montrer que Ker u est stable par v et en déduire, lorsque $K = \mathbb{R}$, que toutes les racines du polynôme caractéristique de v sont réelles.

4° On suppose toujours que $n = 2$ et que u n'est pas l'endomorphisme nul.

a. Quel est l'ensemble des éléments a de E tels que $(a, u(a))$ soit une base de E ? Soit $\mathcal{B}$ une base ainsi constituée.

Écrire la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$.

b. Déterminer par leurs matrices relativement à $\mathcal{B}$ les éléments w de $\mathfrak{L}(E)$ tels que (u, w) ait la propriété (P); soit W l'ensemble qu'ils constituent.

Montrer que les éléments de W sont tous diagonalisables, c'est-à-dire admettent une base de vecteurs propres. Écrire le spectre (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres) d'un élément w de W en fonction de celle de ses valeurs propres qui a la plus petite partie réelle.

c. Soit w_0 l'élément de W dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que l'ensemble des éléments φ de $\mathfrak{L}(E)$ tels que $w_0 + \varphi$ appartienne à W est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}(E)$ dont on donnera la dimension et une base. En déduire la structure de W.

d. Soit w un élément donné de W. Déterminer par l'image qu'ils donnent d'une base de vecteurs propres de w les éléments t de $\mathfrak{L}(E)$ tels que (t, w) ait la propriété (P). Quelle est la structure de l'ensemble T qu'ils constituent ? Quelle est la dimension de T ?

Tournez la page S.V.P.

III

On ne suppose plus que $n = 2$ et l'on désigne par (u, v) un couple d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifie la propriété (P).

1° Montrer que, pour tout entier k strictement positif, on a :

$$u^k \circ v - v \circ u^k = k\, u^k .$$

2° On se propose de montrer que u^n est l'endomorphisme nul.

Supposons que la dimension de Im u^n ne soit pas nulle.

Montrer que Im u^n est stable par u^n et v ; désignant par f et g les endomorphismes induits respectivement par u^n et v sur Im u^n, montrer que f est bijectif, exprimer $f \circ g - g \circ f$ en fonction de f et en déduire une contradiction. Conclure. Quel est alors Ker u^n ?

Dans toute la suite du problème, on suppose que Ker u *est de dimension égale à* 1.

3° *a.* On se propose de montrer, par récurrence sur k, que :

$$\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad \dim(\mathrm{Ker}\ u^k) = k .$$

Soit k un élément de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}\ u^k) = k$.

Montrer que Im u^k est stable par u et que, si f désigne l'endomorphisme induit par u sur Im u^k, on a :

$$\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ u^{k+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\ f \subset \mathrm{Ker}\ u .$$

En déduire que

$$\dim(\mathrm{Im}\ u^{k+1}) = \dim(\mathrm{Im}\ u^k) - 1$$

et achever la démonstration.

b. Montrer que, pour tout entier k strictement positif, Ker u^k est stable par v. Montrer que les vecteurs non nuls de Ker u sont vecteurs propres de v et en déduire, lorsque $K = \mathbb{R}$, que le polynôme caractéristique de v possède au moins une racine réelle.

4° *a.* Quel est l'ensemble des éléments a de E tels que $(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ soit une base de E ? Soit $\mathcal{B}$ une base ainsi constituée.

Écrire la matrice de u, puis celle de u^k $(1 < k < n)$ relativement à $\mathcal{B}$.

Quels sont, parmi les éléments de $\mathcal{B}$, ceux qui constituent une base de Ker u^k ?

b. Soit W l'ensemble des éléments w de $\mathcal{L}(E)$ tels que (u, w) vérifie la propriété (P). Déterminer par leurs matrices relativement à $\mathcal{B}$ tous les éléments de W dont $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres; on écrira une telle matrice en fonction de la valeur propre λ relative au dernier vecteur de $\mathcal{B}$.

5° Soit w_0 celui des endomorphismes ci-dessus relatif à $\lambda = 0$.

a. Montrer que l'ensemble des éléments φ de $\mathcal{L}(E)$ tels que $w_0 + \varphi$ appartienne à W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ dont $(I, u, \ldots, u^{n-1})$ est une base.

b. En déduire la structure de W et écrire la forme générale des matrices relativement à $\mathcal{B}$ des éléments de W.

c. Montrer que les éléments de W sont tous diagonalisables et écrire le spectre d'un élément de W en fonction de celle de ses valeurs propres qui a la plus petite partie réelle.

6° Étendre à la dimension n les propriétés établies en dimension 2 à la question 4° *d* de la partie II.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail